**📗 1주차 워크북 — 정답과 해설지(아주 자세한 풀이)**

표기는 문제집의 동일 번호를 따른다. 각 풀이에 **정의·성질·검산**을 포함해 단계별로 서술했다.

**Ⅰ. 집합(Set)**

**A. 연습문제 — 기본(★)**

**1**. U={1,…,9}, A={짝수}={2,4,6,8}, B={3의 배수}={3,6,9}

* (a) A∩B: **정의**상 교집합은 두 집합에 **동시에** 속하는 원소. 짝수이면서 3의 배수 ⇒ 6.  
  ⇒ A∩B={6}
* (b) A∪B: **정의**상 합집합은 두 집합 중 **하나라도** 속하면 포함.  
  ⇒ {2,3,4,6,8,9}(정렬)
* (c) Aᶜ: **여집합**은 전체집합에서 A를 제외.  
  ⇒ U−A={1,3,5,7,9}

**2**. A⊆B, B⊆C ⇒ A⊆C

* **전달성**: 임의의 x∈A를 잡으면, 가정 A⊆B로 x∈B. 다시 B⊆C로 x∈C.
* 모든 x∈A에 대해 성립하므로 A⊆C.

**B. 연습문제 — 응용(★★)**

**3**. A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, C={2,3,5}

* B∪C={2,3,4,5,6}
* A∩(B∪C): A와 공통인 원소 {2,3,4}
* A∩B={3,4}, A∩C={2,3} ⇒ (A∩B)∪(A∩C)={2,3,4}
* **결론**: 두 표현 동일. 이는 **분배법칙**의 구체 예다.

**4**. U={1,…,20}, A=소수={2,3,5,7,11,13,17,19}(8개), B=짝수(10개)

* A∩B={2}(소수이면서 짝수는 2만 존재)
* 포함배제: |A∪B|=|A|+|B|−|A∩B|=8+10−1=17
* 비교: |A∩B|=1, |A∪B|=17.

**C. 연습문제 — 심화(★★★)**

**5**. A△B = (A∪B)−(A∩B)

* (⊆) x∈A△B ↔ (x∈A 또는 x∈B) **이면서** (x∉A∩B). 즉 x는 A∪B에는 속하되 A∩B에는 속하지 않는다. ⇒ x∈(A∪B)−(A∩B).
* (⊇) x∈(A∪B)−(A∩B) ↔ (x∈A 또는 x∈B) **이고** (x∉A∩B). 즉 한쪽에만 속한다. ⇒ x∈A△B.
* 양방향 포함 성립 ⇒ 등식 성립.

**6**. (A∩B)ᶜ = Aᶜ ∪ Bᶜ

* (⊆) x∈(A∩B)ᶜ ↔ x∉A∩B ↔ (x∉A) 또는 (x∉B) ↔ x∈Aᶜ ∪ Bᶜ.
* (⊇) x∈Aᶜ ∪ Bᶜ ↔ (x∉A) 또는 (x∉B) ↔ x∉A∩B ↔ x∈(A∩B)ᶜ.

**D. 복습 퀴즈(자세 해설)**

**Q1**. A={1,3,5}, B={1,2,3,4}

* A∪B={1,2,3,4,5}, A∩B={1,3}
* A△B=(A∪B)−(A∩B)={2,4,5}
* **검산**: A에만 {5}, B에만 {2,4}, 공통 {1,3}. 대칭차는 “한쪽에만” ⇒ {2,4,5}.

**Q2**. 드모르간

* (A∪B)ᶜ = Aᶜ∩Bᶜ, (A∩B)ᶜ = Aᶜ∪Bᶜ (증명은 위 6번과 동일 논리)

**Q3**. U={1,…,10}, A={2,4,6,8,10}, B={2,3,5,7}

* Aᶜ={1,3,5,7,9}
* Aᶜ∪B={1,2,3,5,7,9}(2가 추가됨에 주의)
* (Aᶜ∪B)∩A = {2} (A의 짝수 집합에서 교집합 되는 것은 2만 가능)

**Ⅱ. 함수(Function)**

**A. 연습문제 — 기본(★)**

**1**. f(x)=x², g(x)=x+1

* (g∘f)(x)=g(x²)=x²+1
* (f∘g)(x)=f(x+1)=(x+1)²=x²+2x+1
* **비고**: 합성은 일반적으로 교환되지 않는다.

**2**. f(x)=ax+b(ℝ→ℝ) 전단사 조건

* **일대일**: f(x1)=f(x2) ⇒ a(x1−x2)=0 ⇒ a≠0이면 x1=x2.
* **전사**: 임의 y∈ℝ, x=(y−b)/a로 f(x)=y 가능(단 a≠0).
* **결론**: 전단사 조건은 a≠0 (b는 임의).

**B. 연습문제 — 응용(★★)**

**3**. f:{1,2,3}→{a,b,c} 일대일

* 정의역·공역 크기 동일(3↔3). 일대일이면 자동 전사.
* 경우의 수: 서로 다른 3개에 대한 전단사 → **3! = 6**.

**4**. y=x³ 일대일 판정

* 단조성: x1<x2 ⇒ x1³<x2³. 또는 f′(x)=3x²≥0로 감소구간 없음.
* **결론**: 일대일.

**C. 연습문제 — 심화(★★★)**

**5**. f(x)=x²(정의역 ℝ)은 역함수 없음

* 이유: x와 −x가 같은 값으로 대응(일대일 실패).
* **정의역 제한**: [0,∞)로 제한하면 단조증가 → f⁻¹(x)=√x(또는 (−∞,0]에서 −√x).
* **검산**: f(f⁻¹(x))=x, f⁻¹(f(x))=x(정의역 내에서).

**6**. g(x)=√x(정의역 x≥0), f(x)=x²

* (g∘f)(x)=√(x²)=|x| (정의역 ℝ, 치역 [0,∞))
* (f∘g)(x)=(√x)²=x (정의역 x≥0)
* **차이 원인**: 정의역 제약과 절댓값 발생.

**D. 복습 퀴즈(자세 해설)**

**Q1**. f(x)=3x−2

* y=3x−2 ⇒ x=(y+2)/3
* f⁻¹(x)=(x+2)/3
* **검산**: f(f⁻¹(x))=x, f⁻¹(f(x))=x.

**Q2**. 개념

* 일대일: 서로 다른 입력 → 서로 다른 출력
* 전사: 공역의 모든 값에 상응 입력 존재
* 전단사: 둘 다 만족(역함수 존재)

**Q3**. f(x)=x², g(x)=√x

* (f∘g)(x)=x(단 x≥0), (g∘f)(x)=|x|(정의역 ℝ)
* **핵심**: √(x²)=|x|.

**Ⅲ. 주간 종합(★~★★★, 자세 해설)**

**1(★★, 복습)** A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)

* (⊆) x∈A∩(B∪C) ⇒ x∈A이고 (x∈B 또는 x∈C) ⇒ x∈(A∩B) 또는 x∈(A∩C) ⇒ x∈(A∩B)∪(A∩C).
* (⊇) x∈(A∩B)∪(A∩C) ⇒ (x∈A∩B) 또는 (x∈A∩C) ⇒ 항상 x∈A이고 또한 x∈B∪C ⇒ x∈A∩(B∪C).

**2(★★, 복습)** f(x)=2x+1, g(x)=x²−1

* (g∘f)(x)=g(2x+1)=(2x+1)²−1=4x²+4x
* (f∘g)(x)=f(x²−1)=2(x²−1)+1=2x²−1
* **차이**: 합성은 일반적으로 교환되지 않음(중간 함수가 다르다).

**3(★, 기출 변형)** U={1,…,20}, A={짝수}, B={3의 배수}

* 짝수(≤20) 10개, 3의 배수 6개, 공통은 6의 배수 3개(6,12,18).
* |A∪B|=10+6−3=13, |A∩B|=3.

**4(★, 기출 변형)** f(x)=x², g(x)=x+1

* (f∘g)(x)=(x+1)²=x²+2x+1
* (g∘f)(x)=x²+1
* **설명**: 입력 처리 순서 차이로 결과가 달라진다.

**5(★★★, 실전 응용)** y=x³+1

* x³=y−1 ⇒ x=∛(y−1)
* f⁻¹(x)=∛(x−1)
* 일대일성: f′(x)=3x²≥0로 단조증가, 서로 다른 입력에 같은 출력 불가 ⇒ 역함수 존재. 역함수도 단조증가로 일대일.

**Ⅳ. 주말 미니 테스트(자세 해설)**

**1(★)** 드모르간

* (A∪B)ᶜ=Aᶜ∩Bᶜ, (A∩B)ᶜ=Aᶜ∪Bᶜ (증명은 Ⅰ-C-6 참조)

**2(★★)** U={1,…,12}, A={4,8,12}, B={3,6,9,12}

* A∩B={12} → |A∩B|=1
* |A∪B|=|A|+|B|−|A∩B|=3+4−1=6
* |Aᶜ|=|U|−|A|=12−3=9

**3(★)** f(x)=2x+1

* y=2x+1 ⇒ x=(y−1)/2
* f⁻¹(x)=(x−1)/2
* 합성 확인: f(f⁻¹(x))=x, f⁻¹(f(x))=x.

**4(★★)** f=x², g=√x

* (f∘g)(x)=x(정의역 x≥0)
* (g∘f)(x)=|x|(정의역 ℝ)
* **차이**: 정의역 제약과 절댓값.

**5(★★★)** y=x³ 일대일(미적분)

* f′(x)=3x²≥0, 감소구간 없음 → 전구간 단조증가 ⇒ 일대일.

**✅ 빠른 정답 모음(최종 값만)**

* Ⅰ-기본1: {6}, {2,3,4,6,8,9}, {1,3,5,7,9}
* Ⅰ-기본2: A⊆C
* Ⅰ-응용3: 동일({2,3,4})
* Ⅰ-응용4: |A∪B|=17, A∩B={2}
* Ⅰ-심화5: 등식 성립, Ⅰ-심화6: 드모르간 성립
* Ⅰ-퀴즈: {2,4,5} / 드모르간 2식 / {2}
* Ⅱ-기본1: x²+1, x²+2x+1
* Ⅱ-기본2: a≠0
* Ⅱ-응용3: 6가지
* Ⅱ-응용4: 일대일
* Ⅱ-심화5: [0,∞)에서 √x (또는 (−∞,0]에서 −√x)
* Ⅱ-심화6: (g∘f)=|x|, (f∘g)=x(x≥0)
* 주간 종합: (1)증명 성립 (2)4x²+4x, 2x²−1 (3)13, 3 (4)x²+2x+1 / x²+1 (5)f⁻¹(x)=∛(x−1)
* 주말 미니: (1)드모르간 (2)6,1,9 (3)(x−1)/2 (4)x, |x| (5)일대일